PART3　条件の否定と命題の否定，必要条件から考える

3　［1］　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1)　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2)　ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$

［2］　実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

Point Pickup

［1］　命題「すべての x について p である」の否定は「ある x について $\overline{p}$ である」

命題「ある x について p である」の否定は「すべての x について $\overline{p}$ である」

「ある」の代わりに「適当な」「少なくとも１つの」，「すべての」の代わりに「任意の」「どのような」といった表現が使われることがある。

［2］　ある特定の x で成り立つための必要条件をいくつか求め，それらによって導かれた必要条件が，十分条件であることを示す。

第2講　PART3　確認問題

1　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

「ある実数 x について，$x^2+3x+2=0$」

この命題の真偽は [ア]

命題の否定は [イ]

命題の否定の真偽は [ウ]

[[ア], [ウ]の選択肢]

①　真　　　②　偽

[[イ]の選択肢]

①「ある実数 x について，$x^2+3x+2 \neq 0$」

②「すべての実数 x について，$x^2+3x+2=0$」

③「すべての実数 x について，$x^2+3x+2 \neq 0$」

2 次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

「すべての実数 x について，$x^2-4x+4>0$」

この命題の真偽は [エ]

命題の否定は [オ]

命題の否定の真偽は [カ]

[[エ], [カ] の選択肢]

① 真　　② 偽

[[オ] の選択肢]

① 「ある実数 x について，$x^2-4x+4>0$」

② 「ある実数 x について，$x^2-4x+4\leqq 0$」

③ 「すべての実数 x について，$x^2-4x+4\leqq 0$」

3 実数 x に関する等式 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

$a=$ [キ]，$b=$ [ク]，$c=$ [ケ]

[MEMO]

PART3　条件の否定と命題の否定，必要条件から考える

3　[1]　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1)　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2)　ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$

[2]　実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

[1]　(1)　命題「すべての実数 x について，$x^2-1>0$」について

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$ より，$x^2-1>0$ は成立しない。

よって，命題は偽

命題の否定「ある実数 x について，$x^2-1\leqq 0$」について

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=-\dfrac{3}{4}\leqq 0$ であるから命題の否定は真

(2)　命題「ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$」について

$x^2+2x+1=(x+1)^2\geqq 0$ であるから，$x^2+2x+1<0$ となる実数 x は存在しない。

よって，命題は偽

命題の否定「すべての実数 x について，$x^2+2x+1\geqq 0$」について

$x^2+2x+1=(x+1)^2\geqq 0$ であるから命題の否定は真

[2]　$ax^2+bx+c=0$ が

$x=0$ について成り立つならば　$c=0$ …… ①

$x=1$ について成り立つならば　$a+b+c=0$ …… ②

$x=-1$ について成り立つならば　$a-b+c=0$ …… ③

①～③より　$a=b=c=0$

これは，実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要条件である。

$a=b=c=0$ ならば　$ax^2+bx+c=0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$

よって，どのような x の値に対しても $ax^2+bx+c=0$ が成り立つ。

ゆえに，$a=b=c=0$ は，実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための十分条件である。

以上より，$a=b=c=0$ が求める必要十分条件である。

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：③，ウ：②

[解説]

命題「ある実数 x について，$x^2+3x+2=0$」について，

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ であるから，

$x=-1$ のとき

$$x^2+3x+2=(-1+1)(-1+2)=0$$

よって，この命題は　**真**

命題の否定

「すべての実数 x について，$x^2+3x+2\neq 0$」 [A]

について，上で調べたように $x=-1$ のとき，

$x^2+3x+2=0$ であるから　**偽** [B]

[A]
・命題「すべての x について p である」の否定は「ある x について $\overline{p}$ である」
・命題「ある x について p である」の否定は「すべての x について $\overline{p}$ である」

[B]　一般に，もとの命題とその否定は真偽が逆になる。すなわち
　もとの命題が真のとき，否定は偽
　もとの命題が偽のとき，否定は真
このことを用いてもよい。

2 **[正解]** エ：②，オ：②，カ：①

[解説]

命題「すべての実数 x について，$x^2-4x+4>0$」について，$x^2-4x+4=(x-2)^2$ であるから，

$x=2$ のとき

$$x^2-4x+4=(2-2)^2=0$$

よって，この命題は　**偽**

命題の否定

「ある実数 x について，$x^2-4x+4\leqq 0$」 [A]

について，上で調べたように $x=2$ のとき，

$x^2-4x+4=0$ であるから　**真** [B]

3 **[正解]** キ：0，ク：0，ケ：0

[解説]

$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ が

$x=1$ について成り立つならば [C] [D]

$$a\cdot0+b\cdot0+c=0$$

すなわち　$c=0$　……(＊)

$x=2$ について成り立つならば

$$a\cdot1^2+b\cdot1+c=0$$

すなわち　$a+b+c=0$　……(＊＊)

$x=0$ について成り立つならば

$$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0$$

すなわち　$a-b+c=0$　……(＊＊＊)

(＊)～(＊＊＊)より　$a=b=c=0$

これは，実数 x に関する等式

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

がどんな x の値に対しても成り立つための必要条件である。

$a=b=c=0$ ならば [C]

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c$$
$$=0\cdot(x-1)^2+0\cdot(x-1)+0=0$$

よって，どんな x の値に対しても

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

が成り立つ。

ゆえに，$a=b=c=0$ は，実数 x に関する等式

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件である。

以上より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{a=0,\ b=0,\ c=0}$$

[C]
①ある特定の x で成り立つための必要条件をいくつか求めて，どんな x の値に対しても成り立つための必要条件を求める。
②求めた必要条件が，十分条件であることを示す。

[D]　左辺が簡単な式になるような x の値を代入する。